

**Федеральное государственное образовательное бюджетное  
учреждение высшего профессионального образования  
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»  
(Пензенский филиал)**

**Кафедра «Математика и информатика»**

Ю.Н. Заваровский

## **ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ**

**Методические указания по  
выполнению контрольной работы**

Для студентов, обучающихся  
по направлению «Экономика»  
(программа подготовки бакалавра)

Пенза 2014

## ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

При выполнении контрольной работы необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не засчитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента.
2. На обложке должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, номер студенческого билета, название дисциплины. Здесь же следует указать домашний адрес и дату отсылки работы в университет.
3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по своему варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи или задачи не своего варианта, не засчитываются.
4. Решения задач необходимо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.
5. Перед решением каждой задачи необходимо выписать полностью ее условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачу своего варианта, имеют общую формулировку, следует, при переписывании условия задачи, заменить общие данные конкретными из соответствующего номера.
6. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи и рисунки. В конце работы следует указать использованную литературу.
7. После получения прорецензированной работы, как недопущенной, так и допущенной к защите, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации. Если работа не допущена к защите, то после исправления указанных рецензентом ошибок работу следует прислать для повторной проверки в короткий срок. При высылаемых исправлениях должны обязательно находиться прорецензированная работа и рецензия к ней. В связи с этим рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента. Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования категорически запрещено!
8. Вариант контрольной работы выбирается по последней цифре номера зачётной книжки. Например, если это цифра 1, то следует решать 1 вариант и т.д. Если последняя цифра в зачётной книжке это цифра 0, то следует решать 10 вариант.

Будьте внимательны при выборе варианта. Работа, выполненная не по своему варианту, возвращается без проверки!

# 1 Теория множеств

Под *множеством* понимают любую совокупность объектов. Сами объекты, из которых состоит множество, называются *элементами*. Множества обозначают прописными буквами ( $A, B, C$  и т.д.), а их элементы – строчными (например:  $x, y, z$ ). Если элемент  $x$  принадлежит множеству  $A$ , то пишут  $x \in A$ . Запись  $x \notin A$  означает, что элемент  $x$  не принадлежит множеству  $A$ . Множество, не содержащее элементов, называется *пустым множеством* и обозначается символом  $\emptyset$ . Для числовых множеств будем использовать следующие обозначения:

$N$  – множество натуральных чисел,

$Z$  – множество целых чисел,

$R$  – множество действительных чисел.

## 1.1 Способы задания множеств

Множества могут быть заданы тремя основными способами.

1. Перечислением элементов множества. Например,  $A = \{2, 7, 10\}$ .
2. Указанием характерных свойств элементов множества. Например,  $A = \{x \in R \mid x > 0\}$  – множество всех положительных чисел.
3. Описанием способа построения. Например,  $A = \{5^i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ .

## 1.2 Отношения между множествами

Два множества *равны*, если они состоят из одних и тех же элементов. Равенство множеств обозначается как  $A = B$ . Если множества не равны, то пишут  $A \neq B$ .

Если каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$ , то пишут  $A \subseteq B$  ( $A$  является *подмножеством* множества  $B$ ). Для числовых множеств выполняется  $N \subseteq Z \subseteq R$ . Считается, что  $\emptyset \subseteq A$  для любого множества  $A$ .

**Теорема.** Множество  $A$  равно множеству  $B$  тогда и только тогда, если  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq A$ .

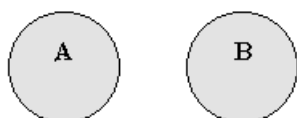
Данная теорема дает метод доказательства равенства двух множеств.

Если все рассматриваемые множества являются подмножествами более широкого множества  $U$ , то множество  $U$  называется *универсальным множеством*.

## 1.3 Диаграммы Венна

Для повышения наглядности представления множеств используют диаграммы Венна в виде кругов, ограничивающих области, которым ставятся в соответствие элементы тех или иных множеств. Например:

Если множества не имеют общих элементов, то их изображают



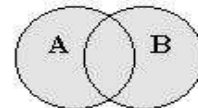
непересекающимися кругами. В противном случае, круги пересекаются. Универсальное множество изображают в виде прямоугольника.

## 1.4 Операции над множествами

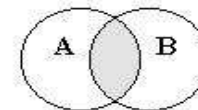
*Декартовым произведением* множеств  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называется множество всех упорядоченных наборов  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  таких, что  $x_i \in A_i$  при  $i=1, 2, \dots, n$ . Декартово произведение обозначается  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ . В частности,  $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ .

Например, пусть имеются множества  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 3, 4\}$ . Тогда  $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$ .

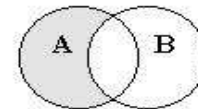
*Объединением* множества  $A$  и  $B$  называется множество  $A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}$ .



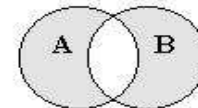
*Пересечением* множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}$ .



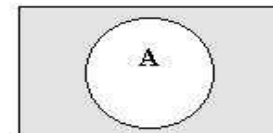
*Разностью* множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}$ .



*Симметрической разностью* множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A - B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .



*Дополнением* множества  $A$  называется множество  $\bar{A} = U \setminus A$ .



Введенные понятия заштрихованы на диаграммах темным цветом.

## 1.5 Свойства операций над множествами

Введенные операции под множествами обладают следующими свойствами.

1. Коммутативность

$$A \cup B = B \cup A;$$

$$A \cap B = B \cap A.$$

2. Ассоциативность

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3. Дистрибутивность

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

4. Идемпотентность

$$A \cap A = A; \quad A \cup A = A.$$

5. Двойственность (законы де Моргана)

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

6. Операции с пустым множеством

$$A \cup \emptyset = A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

7. Операции с универсальным множеством

$$A \cup U = U, \quad A \cap U = A$$

8. Операции с дополнением

$$\overline{\overline{A}} = A, \quad A \cup \overline{A} = U, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset$$

9. Определение разности через пересечение

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

10. Поглощение

$$A \cup (A \cap B) = A; \quad A \cap (A \cup B) = A$$

На основании свойств 1–10 можно получить новые свойства и равенства.

**Пример 1.1.** Доказать, что верно равенство

$$(A \setminus B) \setminus (A \cap C) = (A \setminus C) \setminus B$$

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \setminus (A \cap C) &\stackrel{\text{св-во 9}}{=} (A \setminus B) \cap \overline{(A \cap C)} \stackrel{\text{св-ва 5,9}}{=} (A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \stackrel{\text{св-во 3}}{=} \\ &= (A \cap \overline{B} \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \stackrel{\text{св-ва 1,2}}{=} (A \cap \overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \stackrel{\text{св-ва 2,8}}{=} \\ &= (\emptyset \cap \overline{B}) \cup ((A \cap \overline{C}) \cap \overline{B}) \stackrel{\text{св-ва 1,6,9}}{=} \emptyset \cup ((A \setminus C) \cap \overline{B}) \stackrel{\text{св-во 9}}{=} \\ &= \emptyset \cup ((A \setminus C) \setminus B) \stackrel{\text{св-ва 1,6}}{=} (A \setminus C) \setminus B. \end{aligned}$$

## 1.6 Отношения на множествах

Бинарным отношением  $R$  на множествах  $A$  и  $B$  называется любое подмножество декартова произведения множеств  $A$  и  $B$ .

$$R \subseteq A \times B$$

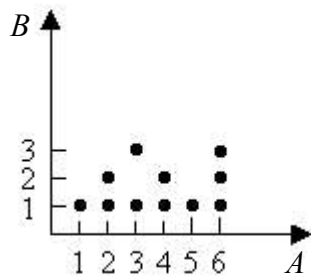
Если элементы  $x$  и  $y$  множества  $A$  и  $B$  находятся в отношении  $R$ , то пишут  $(x, y) \in R$  или  $x R y$ . Если  $A = B$ , то  $R$  называется бинарным отношением на  $A$ .

Бинарное отношение можно задать указанием всех элементов, входящих в соотношение, или графически. Основу графического представления бинарного отношения составляет прямоугольная система координат, где по одной оси откладываются элементы одного множества, а по второй – другого

**Пример 1.2** Рассмотрим множества  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ . Определим на этих множествах отношение  $R \subseteq A \times B$ .

$$R = \{(x, y) \mid x \text{ делится на } y\}.$$

$R$  можно представить графически следующим образом:



Свяжем с каждым бинарным отношением  $R$  между множествами  $A$  и  $B$  два множества – область определения  $\delta_R$  и множество значений  $\rho_R$ . Они определяются следующим образом:

$$\delta_R = \{x \mid (x, y) \in R \text{ для некоторого } y\},$$

$$\rho_R = \{y \mid (x, y) \in R \text{ для некоторого } x\}.$$

**Пример 1.3** Пусть на множестве  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  задано отношение  $R$ :  
 $R = \{(x, y) \mid \text{остаток от деления } x \text{ на } y \text{ равен } 1\}$ .  
Тогда  $R = \{(5, 1), (4, 1), (3, 1), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 5)\}$ ,  
 $\delta_R = \{2, 3, 4, 5\}$ ,  $\rho_R = \{1, 3, 4, 5\}$ .

Пусть имеются множества  $A, B, C$  и отношения  $R \subseteq A \times B$ ,  $P \subseteq B \times C$ . Определим отношение  $S \subseteq A \times C$  следующим образом: оно действует из  $A$  в  $C$  посредством  $R$ , а затем из  $B$  в  $C$  посредством  $P$ . Такое отношение называется составным и обозначается  $S = P \circ R$ .

$$S = \{(x, y) \mid \exists z \in B, \text{ для которого выполнено } (x, z) \in R, (z, y) \in P\}.$$

Бинарное отношение  $R$  на множестве  $A$  называется *рефлексивным*, если для всякого  $a \in A$  выполняется  $aRa$ .

Бинарное отношение  $R$  на множестве  $A$  называется *симметричным*, если из того, что выполняется  $xRy$  следует выполнение  $yRx$ .

Бинарное отношение  $R$  на множестве  $A$  называется *антисимметричным*, если из выполнения  $xRy$  и  $yRx$  следует, что  $x = y$ .

Бинарное отношение  $R$  на множестве  $A$  называется *транзитивным*, если из выполнения  $xRy$  и  $yRz$  следует выполнение  $xRz$ .

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение  $R$  на множестве  $A$  называется *отношением эквивалентности*.

Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение  $R$  на множестве  $A$  называется *частичным порядком*.

**Пример 1.4.** Определим отношение  $R$  на множестве натуральных чисел следующим образом:  $aRb \Leftrightarrow (a + 2b) : 3$  ( $a + 2b$  делится на 3).

Это отношение является рефлексивным, т.к.  $aRa \Leftrightarrow (a + 2a) : 3 \Leftrightarrow 3a : 3$

Отношение  $R$  симметрично.

$aRb \Leftrightarrow (a + 2b) : 3 \Rightarrow a + 2b = 3n \Rightarrow a = 3n - 2b$ . Для того, чтобы проверить выполнение  $bRa$ , необходимо показать, что  $(b + 2a) : 3$ .

$$(b + 2a) = b + 2(3n - 2b) = b + 6n - 4b = 6n - 3b = 3(2n - b),$$

$3(2n - b) : 3 \Rightarrow bRa$  выполнено.

Отношение  $R$  не является антисимметричным, т.к.  $6R3, 3R6$ , но  $6 \neq 3$ .

Проверим, что  $R$  – транзитивно.

$$aRb \Leftrightarrow (a + 2b) : 3 \Rightarrow a + 2b = 3n \Rightarrow a = 3n - 2b,$$

$bRc \Rightarrow (b + 2c) : 3 \Rightarrow b + 2c = 3m \Rightarrow 2c = 3m - b$ . Для того, чтобы проверить выполнение  $aRc$ , необходимо показать, что  $(a + 2c) : 3$ .

$$(a + 2c) = 3n - 2b + 3m - b = 3(n + m - b), 3(n + m - b) : 3 \Rightarrow$$

$aRc$  выполнено.

### Задачи для самостоятельного решения

1.1. Найти  $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A + B, B \setminus A$ , если:

- |  |  |
|--|--|
| а) $A = [0; 8]$  | $B = [-5; 1]$  |
| б) $A = (-\infty; 5]$                                  | $B = [0; +\infty)$                                     |
| в) $A = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$           | $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}\}$                      |
| г) $A = \{x \mid x^2 + 5x + 6 = 0, x \in \mathbb{R}\}$ | $B = \{x \mid x^3 + 5x^2 + 6x = 0, x \in \mathbb{R}\}$ |

1.2. Найти множество  $A \setminus (\bar{B} \cap C)$ , если  $A = (-1; +\infty)$ ,  $B = (-\infty; 1)$ ,  $C = [3; +\infty)$ .

1.3. Изобразить на кругах Эйлера-Венна следующие множества:

$$(A \cap \bar{B}) \cup C, (A \setminus B) \setminus C, (A \setminus C) \setminus B, (A + B) \cap C.$$

1.4. Упростить запись множества, используя основные равенства алгебры множеств:

- а)  $((A \cup \bar{B}) \cup (C \cup \bar{B})) \cap (C \cup B)$   
 б)  $(\overline{A \cup B \cup C \cup A}) \cap (A \cup B) \cap \bar{A}$   
 в)  $((\bar{A} \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup A) \cap \bar{C}$   
 г)  $(\overline{A \cap B \cup (C \cap B) \cup \bar{B} \cup \bar{C}}) \cap \bar{A}$   
 д)  $((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$

1.5. Доказать тождества и показать их верность на кругах Эйлера-Венна:

- а)  $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (A \setminus B)$   
 б)  $(\bar{A} \cup B) \cap A = A \cap B$   
 в)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$   
 г)  $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$   
 д)  $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

1.6. Даны множества  $A = \{2; 3; 4\}$  и  $B = \{1; 4\}$ . Задать бинарное отношение между  $A$  и  $B$  перечислением пар и с помощью графа:

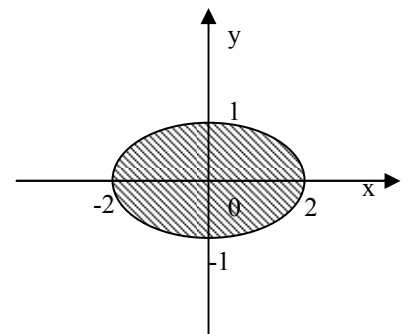
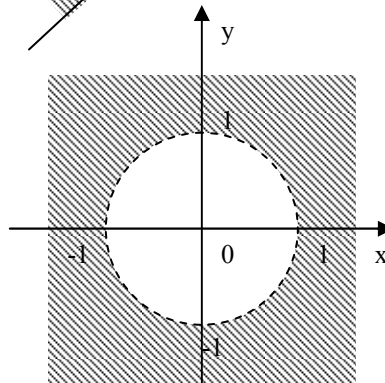
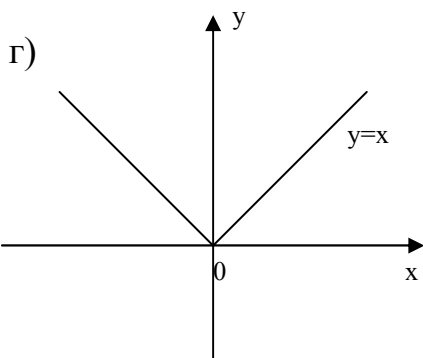
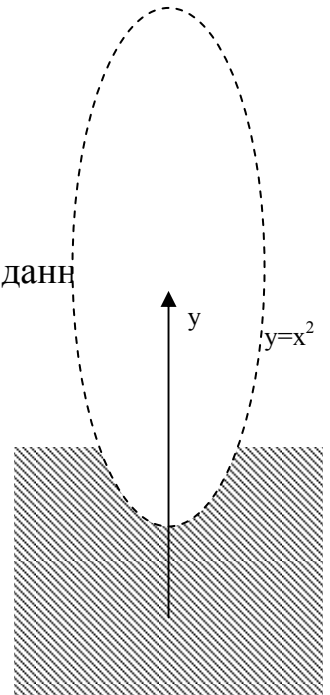
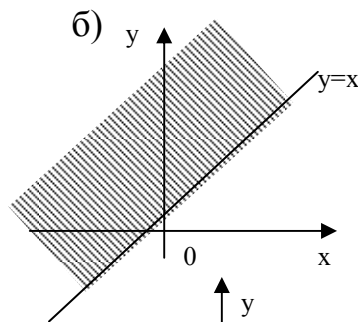
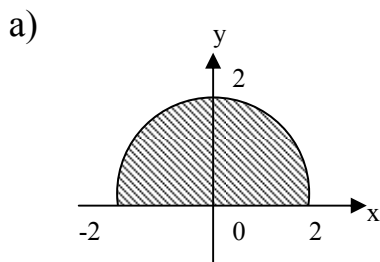
- а)  $\rho_1 = \{(a, b) / a \in A, b \in B \text{ и } a \text{ делится на } b\}$ ;  
 б)  $\rho_2 = \{(a, b) / a \in A, b \in B \text{ и число } (a - b) \text{ - четное}\}$ .

Найти сумму и композиции бинарных отношений  $\rho_1$  и  $\rho_2$ .

1.7. Найти область определения и область значений бинарного отношения  $\rho$ .  
 Найти инверсию бинарного отношения  $\rho$ , композиции  $\rho \circ \rho$ ,  $\rho \circ \rho^{-1}$ ,  $\rho^{-1} \circ \rho$ , если:

- а)  $\rho = \{(3;7), (7;3), (5;3), (1;5)\}$ ;
- б)  $\rho = \{(1;1), (1;2), (1;3), (2;3), (2;4), (3;5)\}$ ;
- в)  $\rho = \{(x,y) / x, y \in \mathbb{R} \text{ и } x+y \geq 0\}$ ;
- г)  $\rho = \{(x,y) / x, y \in \mathbb{R}, x, y - \text{нечетные}\}$ ;
- д)  $\rho = \{(x,y) / x, y \in \mathbb{R} \text{ и } y < 2x-1\}$ ;
- е)  $\rho = \{(x,y) / x, y \in \mathbb{R} \text{ и } y = x^2\}$ .

1.8. Записать бинарные отношения, которым соответствуют даны геометрические интерпретации. Найти  $D_\rho$ ,  $R_\rho$ .



1.9. Выяснить, какими свойствами обладают следующие бинарные отношения:

- а)  $\rho = \{(1,30), (5,6), (6,5), (30,2), (1,2), (5,5)\}$ ;
- б)  $\rho = \{(1,1)\}$ ;
- в)  $\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ ;
- г)  $\rho = \{(x,y) / x, y \in \mathbb{R} \wedge x < y\}$ ;
- д)  $\rho = \{(x,y) / x, y \in \mathbb{Z}_+ \wedge x, y - \text{четные}\}$ ;
- е)  $\rho = \{(x,y) / x, y \in \mathbb{R} \wedge x \text{ делится на } y\}$ ;
- ж) отношение подобия на множестве всех многоугольников плоскости;

1.10. Множество  $X = \{4, 6, -2, 0, 3\}$  разбито следующим образом:

- а)  $\{4, 6\}, \{-2, 0\}, \{3\}$ ;



б)  $\{4\}, \{6, -2, 0\}, \{3\}$ ;

в)  $\{4, 6, -2, 0\}, \{3\}$ ;

г) задать какое-нибудь другое разбиение.

Записать отношение эквивалентности, соответствующее каждому разбиению.

**1.11.** На множестве  $X = \{2, 4, 6, 8\}$  заданы отношения эквивалентности:

а)  $\rho_1 = \{(2, 2), (4, 4), (6, 6), (8, 8)\}$ ;

б)  $\rho_2 = \{(2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4), (6, 6), (8, 8)\}$ ;

в)  $\rho_3 = \{(2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4), (6, 6), (8, 8), (6, 8), (8, 6)\}$ .

Записать для каждого отношения классы эквивалентности, порожденные элементами множества  $X$  и фактор-множество множества  $X$ .

## 2. Комбинаторика

Комбинаторика – раздел математики, посвященный решению задач выбора и разложения элементов некоторого множества в соответствии с заданными правилами. Каждое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества. Простейшими примерами комбинаторных конструкций являются перестановки, размещения и сочетания, рассматриваемые ниже.

### 2.1 Перестановки, размещения и сочетания без повторений

Пусть дано множество  $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ . Набор элементов  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}$  из множества  $M$  называется *выборкой* объема  $m$  из  $n$  элементов. Выборка называется *упорядоченной*, если в ней задан порядок следования. Если порядок следования не является существенным, то выборка называется *неупорядоченной*.

*Размещениями без повторений* из  $n$  элементов по  $m$  называются упорядоченные выборки без повторений элементов множества, которые отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения. Число размещений из  $n$  элементов по  $m$  будем обозначать  $A_n^m$ .

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

**Пример 2.1.** Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что ни одна цифра не повторяется?

Составить разные числа можно  $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$  способами.

*Перестановками без повторений* из  $n$  элементов называются размещения из  $n$  элементов по  $n$ . Обозначим число перестановок объема  $n$  как  $P_n$ .

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

**Пример 2.2.** Сколькими способами можно расставить на полке 6 томов книг?

Это можно осуществить  $P_6 = 6! = 720$  способами.

*Сочетаниями без повторений* из  $n$  элементов по  $m$  называются любые подмножества из  $m$  элементов исходного множества. Число сочетаний без повторений будем обозначать  $C_n^m$ .

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

**Пример 2.3.** На тренировках занимаются 8 баскетболистов. Сколько разных стартовых пятерок может быть образовано тренером?

Т.к. при образовании пятерки важен только ее состав, то достаточно

определить  $C_8^5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$  пятерок.

Число  $C_n^m$  обладает следующими свойствами:

1.  $C_n^m = C_n^{n-m}$ ;
2.  $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$ ;
3.  $(a+b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^m b^{n-m}$  при любых  $a, b \in \mathbf{R}$  (бином Ньютона).

В силу свойства 3, числа  $C_n^m$  называют биномиальными коэффициентами.

## 2.2 Выборки с повторениями

*Размещениями с повторениями* из  $n$  элементов по  $m$  называются упорядоченные выборки из  $m$  элементов множества, в которых элементы множества могут повторяться. Количество всех размещений с повторениями обозначим  $\bar{A}_n^m$ .

$$\bar{A}_n^m = n^m$$

**Пример 2.4.** Сколько всего трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

$$\bar{A}_5^3 = 5^3 = 125.$$

Сочетаниями с повторениями из  $n$  элементов по  $m$  называются неупорядоченные выборки из  $m$  элементов множества, в которых элементы множества могут повторяться. Число всех сочетаний с повторениями обозначим  $\bar{C}_n^m$ .

$$\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

**Пример 2.5.** Сколько различных вариантов количества очков может выпасть при бросании двух кубиков?

$$\bar{C}_6^2 = C_7^2 = \frac{7!}{2!5!} = 21.$$

Перестановками с повторениями из  $n$  элементов по  $k$  называется упорядоченная выборка из  $k$  элементов множества, в которой каждый элемент множества встречается  $k_i$  раз (причем,  $k_1+k_2+\dots+k_n=k$ ). Число перестановок с повторениями обозначается  $P_{k_1,\dots,k_n}$

$$P_{k_1,\dots,k_n} = \frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$$

**Пример 2.6.** Сколько разных слов можно образовать при перестановке букв слова «математика»?

В слове «математика» буква «м» встречается 2 раза, «а» – 3 раза, «т» – 2 раза, «е» – 1 раз, «и» – 1 раз, «к» – 1 раз. Поэтому число различных слов равно

$$P_{2,3,2,1,1,1} = \frac{10!}{2!3!2!1!1!1!} = 151200$$

При подсчете числа комбинаций используют два правила: правило суммы и правило произведения.

**Правило суммы.** Если объект  $A$  можно выбрать  $m$  способами, а объект  $B$  –  $k$  способами, то объект «либо  $A$ , либо  $B$ » можно выбрать  $m+k$  способами.

**Правило произведения.** Если объект  $A$  можно выбрать  $m$  способами, а после каждого такого выбора объект  $B$  можно выбрать  $k$  способами, то пару объектов  $A$  и  $B$  можно выбрать  $m \cdot k$  способами.

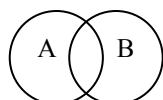
**Пример 2.7.** Сколько разных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2?

Из цифр 0, 1, 2 можно составить  $\bar{A}_4^3 = 3^4 = 81$  число, но сюда входят числа, у которых первая цифра нуль, которые не являются четырехзначными. Таких чисел будет  $\bar{A}_3^3 = 3^3 = 27$ . Поэтому ответ  $81 - 27 = 54$ .

### 2.3 Формулы включений и исключений

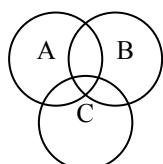
**Мощностью** конечного множества называется количество элементов в нем. Если множество  $A$  имеет  $n$  элементов, то пишут  $|A| = n$ .

Пусть имеется два пересекающихся множества  $A$  и  $B$ . Изобразим их на диаграмме Венна. Тогда имеет место следующая формула:



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Для трех пересекающихся множеств выполняется:



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

**Пример 2.9.** В месяце было 12 дождливых, 8 ветреных, 4 холодных дня, дождливых и ветреных – 5, дождливых и холодных – 3, ветреных и холодных – 2, дождливых, ветреных и холодных – 1 день. Сколько дней была плохая погода?

Пусть  $A$  – дождливые дни,  $B$  – ветреные дни,  $C$  – холодные,  $D$  – дни с плохой погодой. Тогда  $D = A \cup B \cup C$ . Количество дней с плохой погодой:

$$|D| = |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$

$$= 12 + 8 + 4 - 5 - 3 - 2 + 1 = 15$$

В общем случае формула включений и исключений для  $k$  множеств  $A_1, A_2, \dots, A_k$  имеет вид:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| =$$

$$= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2| - \dots -$$

$$- |A_{k-1} \cap A_k| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + |A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k| + \dots +$$

$$+ (-1)^{k-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k|$$

### Задачи для самостоятельного решения

- Найти декартово произведение множеств и изобразить его на координатной плоскости:
  - $A = \{-5; 6; 1\}$   $B = \{1; 3; 7\}$
  - $A = [0; 1]$   $B = [0; 1]$
  - $A = [0; \infty)$   $B = \{2; 3\}$
  - $A = [-1; 2]$   $B = (-2; 4]$
- Найти геометрическую интерпретацию множества  $A \times B$ , где
  - $A$  – множество точек отрезка  $[-1; 3]$ ,  $B$  – множество точек окружности с центром в точке  $(1, 1)$  радиусом 1;
  - $A$  – множество точек отрезка  $[0; 2]$ ,  $B$  – множество точек квадрата с вершинами  $(0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1)$ .

3. Из 220 школьников 163 играют в баскетбол, 173 – в футбол, 24 не играют в эти игры. Сколько человек играют одновременно и в баскетбол и в футбол?
4. Каждый студент группы обладает хотя бы одним из признаков: юноша, волосы крашенные, получает стипендию. Юношей в группе 12, из них 3 покрасили волосы, а 8 получают стипендию. Всего в группе 6 студентов с крашеными волосами, из них 2 получают стипендию и 1 из двоих – юноша. Стипендию получают 14 человек, из них 8 – юношей. Сколько студентов в группе?
5. В диско-клубе собрались представители двух молодежных организаций: комсомола и «Яблоко». Комсомольцев было 24, юношей – 16. Причем юношей-комсомольцев было столько же, сколько девушек – «яблочниц». Сколько человек было на встрече?
6. Множество  $M$  состоит из  $m$  лиц, владеющих хотя бы одним иностранным языком – английским, французским или немецким. Известно, что английским языком владеют 70 лиц, французским – 65, немецким – 50, английским и французским – 40, английским и немецким – 30, французским и немецким – 20, а всеми тремя языками – 5 лиц. Найти  $m$ .
7. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ему дают не более трех имен?
8. Сколько существует делителей числа 210?
9. Слово «абракадабра» составлено из букв пластиковой азбуки, причем повторяющиеся буквы различаются цветом. Сколькими способами из слова «абракадабра» можно составить слово «арка»?
10. Сколькими способами можно раскрасить квадрат, разделенный на 4 части имеющимися пятью цветами: а) допуская окрашивание различных частей в один цвет; б) различные части окрашиваются разными цветами?
11. 12 человек играют в городки. Сколькими способами они могут набрать команду из 4 человек на соревнования?
12. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр числа а) 5127, б) 5120?
13. Сколько нечетных четырехзначных чисел можно составить из цифр числа 3694 (каждую цифру использовать не более одного раза)?
14. Дано число 250671. Сколько четных и сколько нечетных пятизначных чисел можно составить из цифр числа?
15. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются пятизначные числа, не кратные пяти и не содержащие одинаковых цифр. Сколько таких чисел?
16. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр числа 98730, если цифры не повторяются?

17. Из 52 человек нужно выбрать 5 человек на конференцию. Сколькими способами это можно сделать?
18. В магазине 4 сорта пирожных. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?
19. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, нужно выбрать 6 человек так чтобы среди них было не менее двух женщин?
20. Сколько всего четырехзначных чисел делящихся на 2?
21. В подразделении 30 солдат и 3 офицера. Сколькими способами можно выделить патруль, состоящий из трех солдат и одного офицера?
22. Сколькими способами можно разделить группу из 15 человек на две группы так, чтобы в одной было 4 человека, а в другой 11?
23. Сколькими способами можно расставить  $n$  нулей и  $k$  единиц так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом? ( $n \geq k$ )
24. На книжной полке стоят 12 книг. Сколькими способами можно выбрать 5 книг так, чтобы никакие две из них не стояли рядом?
25. Для фотографирования группы, состоящей из 8 мужчин и 6 женщин, фотограф хочет посадить в первый ряд двух женщин и трех мужчин так, чтобы лица одного пола не сидели рядом. Сколькими способами может быть сформирован первый ряд?
26. Сколькими способами можно переставить цифры числа 1234114546 так, чтобы три одинаковые цифры не шли друг за другом?
27. Сколькими способами можно переставить цифры числа 12341234 так, чтобы никакие две одинаковые цифры не стояли рядом?

### 3. Алгебра логики

#### 3.1 Булевы функции

Функцией алгебры логики или *булевой функцией* называется функция  $n$  переменных  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , если аргументы функции являются булевыми переменными (т.е.  $x_i \in \{0,1\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ), и функция может принимать только два значения: 0 или 1. Таким образом, булева функция  $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ . Булевы функции называются также *переключательными функциями*. Каждая комбинация значений аргументов булевой функции называется набором. Для функции  $n$  переменных количество разных наборов равно  $2^n$ .

Булева функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  задается таблицей истинности:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_{n-1}$	$x_n$	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
-------	-------	-------	-----	-----------	-------	---------------------------

0	0	0	...	0	0	$f(0,0,\dots,0,0)$
0	0	0	...	0	1	$f(0,0,\dots,0,1)$
...	...	...	...	...	...	...
1	1	1	...	1	0	$f(1,1,\dots,1,0)$
1	1	1	...	1	1	$f(1,1,\dots,1,1)$

Рассмотрим булевы функции одного аргумента. Эти функции определены на двух наборах. Приведем обозначения и названия этих функций.

$x$	0	1	$f_1$	$f_2$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Функции 0 и 1 называются соответственно тождественным нулем и тождественной единицей. Функция  $f_1$  называется тождественной функцией и обозначается через  $x$ . Функция  $f_2$  называется отрицанием  $x$  и обозначается  $\bar{x}$ .

Рассмотрим часто используемые булевы функции двух аргументов. Эти функции определены на четырех наборах.

$x_1$	$x_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$
0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1	0

Приведем обозначения и названия этих функций. Функция  $f_3$  называется конъюнкцией  $x_1$  и  $x_2$  и обозначается  $x_1 \cdot x_2$ . Функция  $f_4$  называется дизъюнкцией  $x_1$  и  $x_2$  и обозначается  $x_1 \vee x_2$ . Функция  $f_5$  называется суммой по модулю 2 и обозначается  $x_1 \oplus x_2$ . Функция  $f_6$  называется импликацией и обозначается  $x_1 \rightarrow x_2$  (читается  $x_1$  влечет  $x_2$ ). Функция  $f_7$  называется эквивалентностью и обозначается  $x_1 \sim x_2$  (читается  $x_1$  эквивалентно  $x_2$ ). Функция  $f_8$  называется штрихом Шеффера и обозначается  $x_1 | x_2$  (читается не  $x_1$  и  $x_2$ ).

С помощью операции суперпозиции из этих элементарных функций можно построить функции большего числа аргументов. Заметим, что булеву функцию можно однозначно определить перечислением всех наборов, на которых она принимает значение 1.

Функция  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$  существенно зависит от переменной  $x_i$ , если  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \neq f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$  для любых значений  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ . В противном случае переменная  $x_i$  - фиктивная. Наборы, отличающиеся значением только одной переменной  $x_i$ , называются соседними.

### 3.2 Булева алгебра

Множество булевых функций с операциями  $\vee$  (дизъюнкция),  $\cdot$  (конъюнкция),  $\bar{\phantom{x}}$  (отрицание) называется *булевой алгеброй*. Операция

отрицание имеет самый высокий приоритет, затем идет конъюнкция, а затем дизъюнкция. Рассмотрим основные аксиомы булевой алгебры (в аксиомах  $x$ ,  $y$ ,  $z$  могут быть булевыми переменными или функциями).

1.  $x \cdot y = y \cdot x$

$x \vee y = y \vee x$  коммутативность

2.  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$  ассоциативность

3.  $x \cdot x = x$

$x \vee x = x$  идемпотентность

4.  $x \cdot 1 = x$

$x \cdot 0 = 0$

$x \vee 1 = 1$

$x \vee 0 = x$  свойство констант

5.  $\overline{\overline{1}} = 0$

$\overline{\overline{0}} = 1$

$\overline{\overline{x}} = x$  аксиомы отрицания

6.  $x \vee y \cdot z = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$

$x \cdot (y \vee z) = x \cdot y \vee x \cdot z$  дистрибутивность

7.  $x \vee \overline{x} = 1$  закон исключения третьего

8.  $x \cdot \overline{x} = 0$  закон противоречия

9.  $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

$\overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$  законы де Моргана

Если в формуле несколько одинаковых по старшинству операций следуют друг за другом, то они выполняются слева направо.

Рассмотрим несколько дополнительных законов булевой алгебры, которые могут быть доказаны с помощью перечисленных выше аксиом и которые часто используются для эквивалентных преобразований.

1.  $x \vee x \cdot y = x \cdot (x \vee y) = x$  поглощение

2.  $x \cdot y \vee x \cdot \overline{y} = x$  склеивание

### 3.3 Нормальные формы

Булевы функции удобнее задавать в виде формул. Одной функции может соответствовать множество формул, содержащих аргументы функции, знаки дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

*Элементарной дизъюнкцией* называется дизъюнкция конечного множества переменных или их отрицаний, в котором каждая переменная встречается не более одного раза.



**Пример 3.1.**  $x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3, x_1$

*Элементарной конъюнкцией* называется конъюнкция конечного множества переменных или их отрицаний, в котором каждая переменная встречается не более одного раза.

**Пример 3.2.**  $\overline{x_1 x_2 x_3}, \overline{x_2}$

*Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)* называется дизъюнкция конечного множества попарно различных элементарных конъюнкций.

**Пример 3.3.**  $x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2} \vee x_3, \overline{x_2} \vee x_3$

Аналогично, можно определить *конъюнктивную нормальную форму (КНФ)*, как конъюнкцию конечного множества попарно различных элементарных дизъюнкций.

**Пример 3.4.**  $(x_1 \vee x_2)(\overline{x_1} \vee (\overline{x_2} \vee \overline{x_3})), \overline{x_2} \vee x_3$

В примере видно, что  $\overline{x_2} \vee x_3$  является одновременно ДНФ и КНФ.

Для любой функции можно найти ее представление в ДНФ и КНФ, используя аксиомы алгебры логики.

**Пример 3.5.** Найти ДНФ, КНФ для функции

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1 x_2 \vee \overline{x_2 x_3})(x_1 \vee \overline{x_4}) \\ f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1 x_2 \vee \overline{x_2 x_3})(x_1 \vee \overline{x_4}) \stackrel{\text{акс.6}}{=} x_1 x_2 x_1 \vee x_1 x_2 \overline{x_4} \vee \\ &\vee \overline{x_2 x_3} x_1 \vee \overline{x_2 x_3} \overline{x_4} \stackrel{\text{акс.1,3}}{=} x_1 x_2 \vee x_1 x_2 \overline{x_4} \vee \overline{x_1 x_2 x_3} \vee \overline{x_2 x_3} \overline{x_4} - \text{ДНФ.} \\ f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1 x_2 \vee \overline{x_2 x_3})(x_1 \vee \overline{x_4}) \stackrel{\text{акс.6}}{=} \\ &= (x_1 x_2 \vee \overline{x_2})(x_1 x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_4}) \stackrel{\text{акс.1}}{=} \\ &= (\overline{x_2} \vee x_1 x_2)(x_3 \vee x_1 x_2)(x_1 \vee \overline{x_4}) \stackrel{\text{акс.6}}{=} \\ &= (\overline{x_2} \vee x_1)(\overline{x_2} \vee x_2)(x_3 \vee x_1)(x_3 \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_4}) \stackrel{\text{акс.1,7}}{=} \\ &= (x_1 \vee \overline{x_2})(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_4}) - \text{КНФ.} \end{aligned}$$

Любая булева функция может иметь много представлений в виде ДНФ и КНФ. Особое место среди этих представлений занимают совершенные ДНФ (СДНФ) и совершенные КНФ (СКНФ).

*Конституентой единицы*  $K^1$  набора  $a_1, \dots, a_n$  называется конъюнкция всех переменных, образующих этот набор. Причем, переменная входит в конъюнкцию с отрицанием, если она на данном наборе равна 0 и без

отрицания, если она равна 1. *Конституентой нуля*  $K^0$  данного набора называется дизъюнкция всех переменных, образующих этот набор. Переменная входит в дизъюнкцию без отрицания, если она на этом наборе равна 0 и с отрицанием, если она равна 1. *Совершенная дизъюнктивная нормальная форма* функции  $f$  – дизъюнкция  $K^1$  тех наборов, на которых функция принимает значение 1. *Совершенная конъюнктивная нормальная форма* функции  $f$  – конъюнкция  $K^0$  тех наборов, на которых функция принимает значение 0. Представление функции в СДНФ или СКНФ единственно. Совершенные формы легко строить по таблице истинности.

**Пример 3.6.** Построим СДНФ и СКНФ для функции  $f$ , для которой задана таблица истинности.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Для построения СДНФ рассмотрим все наборы, на которых функция принимает значение 1, и выпишем для этих наборов все  $K^1$ :

$$\overline{x_1}\overline{x_2}\overline{x_3}, \overline{x_1}\overline{x_2}x_3, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}, \overline{x_1}x_2x_3.$$

Тогда СДНФ имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_1}\overline{x_2}\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2x_3).$$

Для построения СКНФ рассмотрим все наборы, на которых функция принимает значения 0, и выпишем для этих наборов  $K^0$ :

$$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}, x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}, \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}, \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3.$$

Тогда СКНФ имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)$$

Для построения СДНФ из ДНФ можно домножить элементарную конъюнкцию на  $(x_i \vee \overline{x_i})$  (если переменная  $x_i$  отсутствует в элементарной конъюнкции) и применить закон дистрибутивности.

**Пример 3.7.** Найти СДНФ для функции

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \vee \overline{x_2}x_3$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \vee \overline{x_2}x_3 =$$

$$= x_1(x_2 \vee \overline{x_2})(x_3 \vee \overline{x_3}) \vee (x_1 \vee \overline{x_1})\overline{x_2}x_3 =$$

$$= (x_1x_2 \vee x_1\overline{x_2})(x_3 \vee \overline{x_3}) \vee \overline{x_1}\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3 =$$

$$= x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_1\overline{x_2}\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} =$$

$$= x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} - \text{СДНФ.}$$

Для построения СКНФ из КНФ в элементарную дизъюнкцию, не содержащую переменную  $x_i$ , добавляем  $x_i \overline{x_i}$  и применяем закон дистрибутивности.

**Пример 3.8.** Найти СКНФ для функции  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2)x_3$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 \vee x_2)x_3 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \overline{x_3})(x_1 \overline{x_1} \vee x_2 \overline{x_2} \vee x_3) = \\ &= (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \cdot \\ &\cdot (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) = \\ &= (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) - \\ &\text{СКНФ.} \end{aligned}$$

### Задачи для самостоятельного решения

- Какие из следующих предложений являются высказываниями? Определите какие из высказываний истинные, а какие ложные.
  - Минск – столица Белоруссии.
  - Каждое целое число является и числом рациональным.
  - $X^2 > 0$ .
  - Треугольник ABC подобен треугольнику A'B'C'.
  - Луна есть спутник Марса.
  - Кислород-газ.
- Запишите символически следующие высказывания, употребляя буквы для обозначения простых высказываний.
  - 3 есть простое число, и 9 есть составное число.
  - Петр встанет, и он или Иван уйдет.
  - Петр встанет и уйдет, или Иван уйдет.
  - Студент не может заниматься, если он устал или голоден.
  - Если Петр опоздал и не пойдет на первый час лекции, то он не будет доволен, а если он не опоздает, он доволен.
  - Для того, чтобы натуральное число  $a$  было нечетным, достаточно, чтобы  $a$  было простым и большим двух.
  - Необходимое и достаточное условие для жизни растений состоит в наличии питательной почвы, чистого воздуха и солнечного света.
- Пусть A высказывание «сегодня светит солнце», B – «сегодня идет снег», C – «сегодня пасмурно» и D – «вчера было ясно». Переведите на обычный язык следующие высказывания:
 

а) $A \vee \neg C$ ;	в) $A \wedge \neg(B \vee C)$ ;	д) $\neg(A \leftrightarrow D)$ ;
б) $B \vee C$ ;	г) $A \rightarrow \neg(C \wedge B)$ ;	е) $(B \rightarrow C) \vee A$ .
- Установите, какие из высказываний в следующих парах являются отрицаниями друг друга и какие – нет (объясните почему):
  - $2 < 0$ ,  $2 > 0$ .

- б)  $6 < 9$ ,  $6 \geq 9$ .
- в) «Треугольник ABC прямоугольный», «Треугольник ABC тупоугольный».
- г) «Натуральное число  $n$  четно», «Натуральное число  $n$  нечетно».
- д) «Функция  $F$  нечетна», «Функция  $F$  четна».
- е) «Все простые числа нечетны», «Существует простое четное число».
5. Следующие высказывания запишите без знака отрицания:
- а)  $\neg(a < b)$ ;    б)  $\neg(a \geq b)$ ;    в)  $\neg(a > b)$ ;    г)  $\neg(a \leq b)$ .
6. Определите значения истинности следующих высказываний:
- а) Ленинград расположен на Неве и  $2+3=5$ .
- б) 7-простое число и 9-простое число.
- в) 7-простое число или 9-простое число.
- г)  $2 \cdot 2=4$ , и  $2 \cdot 2 \leq 5$ , и  $2 \cdot 2 \geq 4$ .
- д)  $2 \cdot 2=4$  или белые медведи живут в Африке.
- е) Если 12 делится на 6, то 12 делится на 3.
- ж) Если 11 делится на 6, то 11 делится на 3.
- з) Если 15 делится на 6, то 15 делится на 3.
7. Определите значения истинности высказываний А, В, С, D и Е в следующих предложениях, из которых первые четыре истинные, а последние пять ложные:
- а)  $A \wedge (2 \cdot 2=4)$ .
- б)  $C \vee (2 \cdot 2=5)$ .
- в) Если 4 – четное число, то А.
- г) Если В, то 4-нечетное число.
- д)  $B \wedge (2 \cdot 2=4)$ .
- е)  $D \vee (2 \cdot 2=5)$ .
- ж)  $E \wedge (2 \cdot 2=5)$ .
- з) Если 4-четное число, то С.
- и) Если D, то 4 – нечетное число.
8. Сформируйте и запишите в виде конъюнкции или дизъюнкции условие истинности каждого предложения (а и b – действительные числа):
- а)  $a \cdot b \neq 0$             г)  $\frac{a}{b} = 0$             ж)  $|a| > 3$
- б)  $a \cdot b = 0$             д)  $|a| = 3$             з)  $a^2 + b^2 \neq 0$
- в)  $a^2 + b^2 = 0$             е)  $|a| < 3$             и)  $\frac{a}{b} \neq 0$
9. Пусть через А обозначено высказывание «9 делится на 3», а через В высказывание «8 делится на 3». Определите значения истинности следующих высказываний:
- а)  $A \rightarrow B$             г)  $\neg B \rightarrow A$             ж)  $A \rightarrow \neg B$
- б)  $B \rightarrow A$             д)  $\neg A \rightarrow \neg B$             з)  $\neg A \leftrightarrow \neg B$
- в)  $\neg A \rightarrow B$             е)  $\neg B \rightarrow \neg A$             и)  $A \leftrightarrow \neg B$
10. Определите значения истинности высказываний А, В, С и D в следующих предложениях, из которых первые два истинные, а последние два ложные:
- а)  $A \leftrightarrow (2 < 3)$ ;

б)  $B \leftrightarrow (2 > 3)$ ;

в)  $C \leftrightarrow (2 < 3)$ ;

г)  $D \leftrightarrow (2 > 3)$ .

11. Для каждого из помещенных ниже высказываний определите, достаточно ли приведенных сведений, чтобы установить его логическое значение. Если достаточно, то укажите это значение. Если недостаточно, то укажите, что возможны и одно, и другое истинностные значения:

а)  $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ ,  $C=1$ ;

б)  $A \wedge (B \rightarrow C)$ ,  $B \rightarrow C=0$ ;

в)  $A \vee (B \rightarrow C)$ ,  $B=0$ ;

г)  $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ ,  $A=1$ ;

д)  $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ ,  $B=1$ ;

е)  $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee C)$ ,  $A=0$ ;

12. Верны ли следующие выводимости (доказательство провести с помощью таблиц истинности и методом от противного):

а)  $A \rightarrow B, A \rightarrow C, B \wedge C \not\models A$ ;

б)  $A \rightarrow B, C \rightarrow B, A \wedge C \not\models B$ ;

в)  $A \wedge B, \neg A \not\models \neg B$ ;

г)  $A \vee B, \neg A \not\models \neg B$ ;

д)  $A \rightarrow (B \vee C), A \wedge \neg C \not\models \neg B$ ;

е)  $X \vee Y \vee Z, X \not\models \neg Y \wedge \neg Z$ ;

13. Приведите равносильными преобразованиями каждую из следующих формул к дизъюнктивной нормальной форме:

а)  $\neg(X \vee Z) \wedge (X \rightarrow Y)$ ;

б)  $(X \leftrightarrow Y) \wedge \neg(Z \rightarrow T)$ ;

в)  $(X \vee (Y \wedge \neg Z)) \wedge (X \vee Z)$ ;

г)  $((X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \rightarrow \neg X)) \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg Z)$ ;

д)  $(X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \rightarrow ((X \rightarrow \neg Z) \rightarrow (X \rightarrow \neg Y))$ .

Решение:

а)  $\neg(X \vee Z) \wedge (X \rightarrow Y) \equiv (\neg X \wedge \neg Z) \wedge (\neg X \vee Y) \equiv \neg X \wedge \neg Z \wedge (\neg X \vee Y) \equiv (\neg X \wedge \neg Z \wedge \neg X) \vee (\neg X \wedge \neg Z \wedge Y) \equiv (\neg X \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z)$ .

14. Приведите равносильными преобразованиями каждую из формул задачи 13. к конъюнктивной нормальной форме.

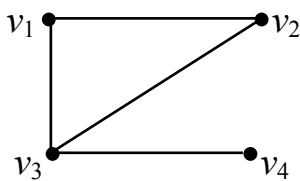
#### 4 Теория графов

Часто бывает полезно и наглядно изобразить некоторую ситуацию в виде рисунка, состоящего из точек (вершин), представляющих основные элементы

ситуации и линий (ребер), отражающих связи между элементами. Такие рисунки называются графами.

Граф может изображать сеть улиц в городе (вершины – перекрестки, улицы – ребра), блок-схемы программ (вершины – блоки, ребра – переходы), электрические цепи, географические карты и т.д. Более точно, *граф* определяется как упорядоченная пара  $(V, E)$ , где  $V$  – непустое множество вершин,  $E \subset V^2$  – множество ребер. Граф будем обозначать  $G$ . Число вершин графа называется его *порядком* и обозначается  $|V|$ , число ребер обозначается как  $|E|$ . Вершины  $u$  и  $v$  называются *смежными*, если существует ребро их соединяющее. Вершина  $v$  и ребро  $e$  *инцидентны*, если  $v$  является концом  $e$ .

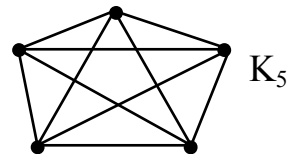
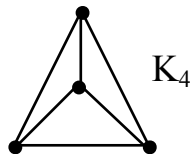
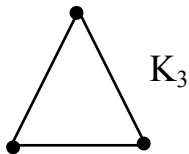
**Пример 4.1.**



Вершины  $v_1$  и  $v_2$  являются смежными, вершина  $v_1$  инцидентна ребрам  $(v_1, v_2)$  и  $(v_1, v_3)$ .  
 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ,  
 $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4)\}$

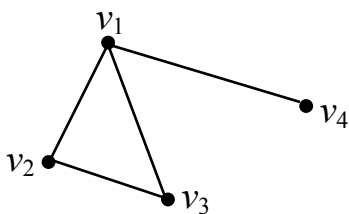
Граф называется *полным*, если любые две его вершины смежны. Такие графы обозначаются  $K_n$ .

**Пример 4.2.**



Граф называется *помеченным*, если всем его вершинам присвоены некоторые метки  $1, 2, \dots, n$ . *Степенью вершины  $v$*  называется число инцидентных ей ребер. Степень вершины обозначается  $deg v$ .

**Пример 4.3.**



$$deg(v_1) = 3, deg(v_4) = 1$$

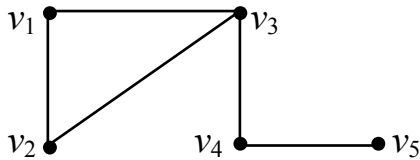
**Лемма** ("о рукопожатиях"). Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу его ребер, т.е.

$$\sum_{v \in G}^n \deg(v) = 2|E|$$

Последовательность степеней вершин графа, записанных в каком-либо порядке, называется степенной последовательностью.

**Пример 4.4.**

Найдем степенную последовательность для графа  $G$ .



Выпишем степени всех вершин графа в соответствии с их номерами

(2,2,3,2,1).

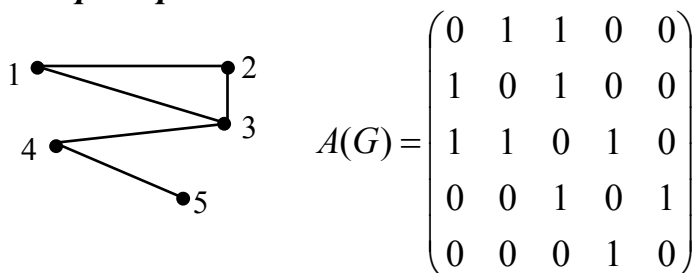
### 4.1 Способы задания графов

Пусть  $G$  – помеченный граф с  $n$  вершинами и  $m$  ребрами. Определим матрицу смежности  $A(G)$  следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ – смежные} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Матрица смежности квадратная, размера  $n \times n$ .

**Пример 4.5.**

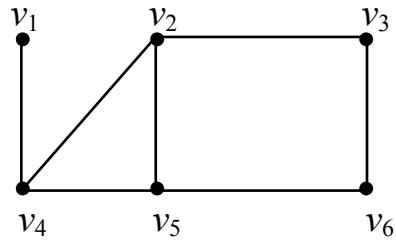


$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Можно заметить, что матрица смежности является симметричной, и количество единиц в каждой строке равно степени вершины, которой соответствует эта строка. По матрице смежности легко построить графическое представление графа.

**Пример 4.6.** Построить граф по матрице смежности

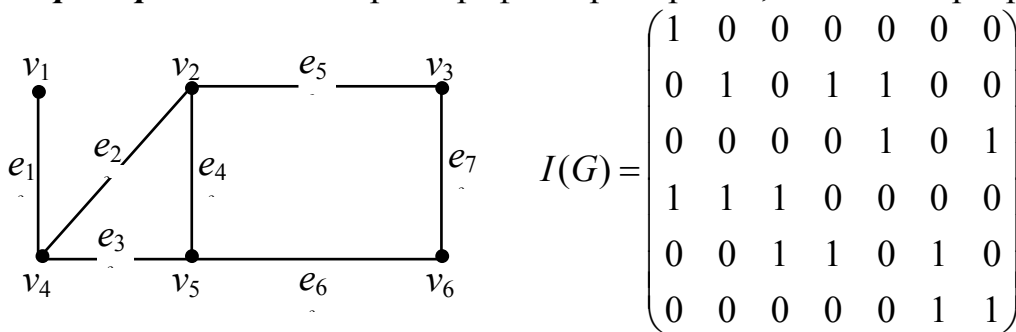
$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Можно определить *матрицу инцидентности*  $I(G)$ , имеющую  $n$  строк и  $m$  столбцов, элементы которой задаются следующим образом:

$$i_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_k \text{ инцидентна ребру } e_l \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

**Пример 4.7.** Рассмотрим граф из примера 4.6, обозначив ребра.



$$I(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

В каждой строке матрицы инцидентности только два элемента отличные от 0 (или один, если ребро является петлей). Поэтому такой способ описания оказывается неэкономным. Отношение инцидентности можно задать также списком ребер графа. Каждая строка этого списка соответствует ребру, в ней записаны номера вершин, инцидентных ему.

**Пример 4.8.** Рассмотрим граф из примера 4.7. Список ребер имеет вид:  $e_1(v_1, v_4)$ ,  $e_2(v_2, v_4)$ ,  $e_3(v_4, v_5)$ ,  $e_4(v_2, v_5)$ ,  $e_5(v_2, v_3)$ ,  $e_6(v_5, v_6)$ ,  $e_7(v_3, v_6)$ .

По списку ребер графа легко построить матрицу инцидентности, т.к. каждое ребро этого списка соответствует столбцу матрицы, а номера вершин в каждом элементе списка — это номера элементов строки матрицы инцидентности, которые равны 1.

Граф может быть представлен различными способами. Иногда не легко понять, одинаковы ли графы, изображенные разными чертежами или разными матрицами. Графы, отличающиеся только нумерацией вершин, называются изоморфными. Перенумерация задается строкой  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  новых номеров вершин, расположенных в исходном порядке. Новая матрица смежности получается в результате перемещения каждого элемента  $a_{ij}$  в  $\alpha_i$



строку и  $\alpha_j$  столбец, т.е. в результате перестановки  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  строк и столбцов исходной матрицы. Можно выполнить все возможные перестановки строк и столбцов для того, чтобы убедиться в неизоморфности графов, но это потребует  $n!$  перестановок, что достаточно трудоемко.

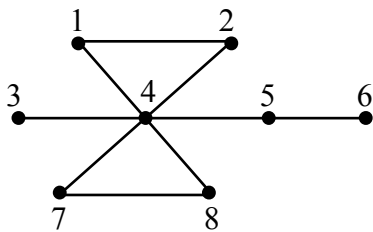
## 4.2 Маршруты, цепи, циклы

*Маршрутом* от вершины  $u$  к вершине  $v$  или  $(u, v)$  маршрутом в графе  $G$  называется всякая последовательность вида

$$u = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n = v,$$

где  $e_k$  – ребро, соединяющее вершины  $v_{k-1}$  и  $v_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . В случае орграфа  $v_{k-1}$  – начало ребра  $e_k$ , а  $v_k$  – его конец. При этом вершину  $u$  называют *началом маршрута*, а вершину  $v$  – его *концом*. В маршруте некоторые вершины и ребра могут совпадать. Маршрут можно задавать последовательностью вершин  $v_0, v_1, \dots, v_n$ , а также последовательностью ребер  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Число ребер в маршруте называется его *длиной*. Маршрут называется *цепью*, если в нем нет совпадающих ребер, и *простой цепью* – если дополнительно нет совпадающих вершин, кроме, может быть, начала и конца цепи. Если начало цепи (простой цепи) совпадает с ее концом, то такая цепь называется *циклом* (*простым циклом*). Граф без циклов называется *ациклическим*.

### Пример 4.9.



$(1, 2, 4, 7)$  – простая цепь;

$(1, 2, 4, 7, 8, 4)$  – цепь, не являющаяся простой;

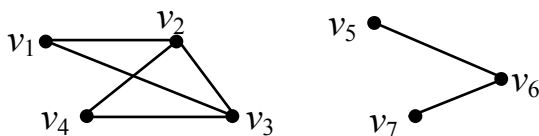
$(1, 2, 4, 7, 8, 4, 2)$  – маршрут, не являющийся цепью;

$(1, 2, 4, 7, 8, 4, 1)$  – цикл, не являющийся простым;

$(1, 2, 4, 1)$  – простой цикл.

Граф называется *связным*, если любые две вершины  $u$  и  $v$  в нем можно соединить  $(u, v)$  маршрутом. Легко видеть, что отношение связности на множестве вершин является отношением эквивалентности. Данное отношение разбивает множество вершин графа на классы, объединяющие вершины, которые можно связать друг с другом маршрутом. Такие классы называются *компонентами связности*. Связный граф имеет одну компоненту связности.

### Пример 4.10.



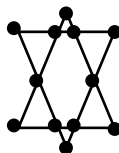
Граф на рисунке имеет две компоненты связности.

## 4.3 Эйлеровы графы

Цикл в графе называется *эйлеровым*, если он содержит все ребра графа. Связный граф, в котором существует эйлеров цикл, также называется эйлеровым. Эйлеровый граф можно нарисовать не отрывая карандаша от бумаги.



сабли Магомета



звезда Давида

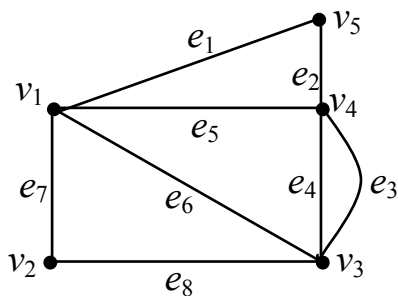
**Пример 4.11.**

**Теорема Эйлера.** Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четные.

Для нахождения эйлеровой цепи в связной графе, который имеет вершины только четной степени, используют алгоритм Флери. Этот алгоритм использует два правила:

1. Стартуем из произвольной вершины графа и идем по ребрам, включая эти ребра в эйлерову цепь и удаляя их из графа.
2. Выбираем в очередной вершине путь по перешейку только в том случае, если нет пути по циклу. Перешейком называется ребро, не принадлежащее никакому циклу.

**Пример 4.12.**



Начать построение эйлерового цикла можно с любого ребра графа. Начиная с  $e_1$ , получим цикл

$v_1, e_1, v_5, e_2, v_4, e_3, v_3, e_4, v_4, e_5, v_1, e_6, v_3, e_8, v_2, e_7, v_1$ .

В данном случае сразу получили эйлерову цепь. Если в графе остаются ребра, которые нельзя использовать для продолжения имеющегося пути, то следует начать строить простой замкнутый цикл из уже пройденной вершины и инцидентного ей ребра, если последнее ранее не использовалось.

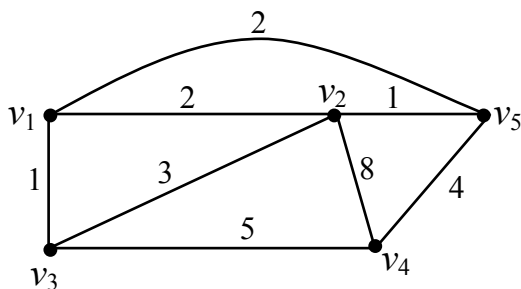
**4.4 Задача поиска минимального остова графа**

Эта задача возникает при проектировании линий электропередач, трубопроводов, дорог и т.д., когда требуется заданные центры соединить некоторой системой каналов связи таким образом, чтобы любые два центра были связаны непосредственно или через другие каналы, и чтобы общая длина (стоимость) каналов связи была минимальной.

*Остовом* графа называется связный подграф без циклов, содержащий все вершины исходного графа. Подграф содержит часть или все ребра исходного графа. Задача о минимальном остове формулируется следующим образом: во взвешенном связном графе найти остов минимального веса. Рассмотрим алгоритм Краскала решения этой задачи. В алгоритме используются два правила:

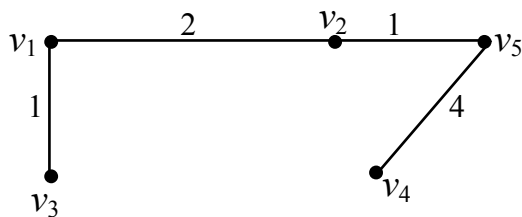
1. Первое ребро остова – ребро минимального веса в исходном графе.
2. Если граф  $T_i$  уже построен ( $i < n-1$ ), то новый граф  $T_{i+1}$  получается из графа  $T_i$  присоединением ребра  $e_{i+1}$ , имеющего минимальный вес среди ребер, не входящих в  $T_i$ , и не составляющего циклов с ребрами из  $T_i$ .

**Пример 4.13.** Найти минимальный остов во взвешенном графе.



Построение остова начнем с ребра  $(v_1, v_3)$ . Порядок присоединения ребер к остову:

$(v_1, v_3), (v_2, v_5), (v_1, v_2), (v_4, v_5)$ .



Вес остова  $W=1+2+1+4=8$ .

### 1.7 Задача поиска кратчайших расстояний между всеми парами вершин графа

Пусть имеется граф  $G$  со множеством вершин  $V=\{v_1, \dots, v_n\}$ . Обозначим через  $d_{ij}^{(m)}$  длину кратчайшего пути из  $v_i$  в  $v_j$  с промежуточными вершинами во множестве  $\{v_1, \dots, v_m\}$ . Рассмотрим алгоритм Флойда-Уоршалла нахождения матрицы  $D$ , элементы которой – кратчайшие пути между всевозможными парами вершин графа  $G$ . Алгоритм использует три правила:

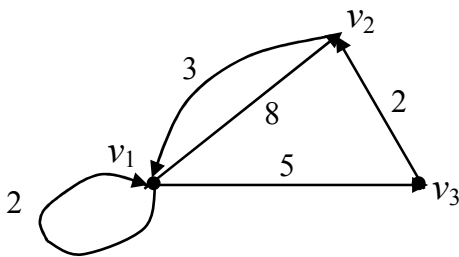
1.  $d_{ij}^{(0)} = a_{ij}$ , где  $a_{ij}$  – вес дуги, соединяющий вершины  $v_i$  и  $v_j$ .

$$2. d_{ij}^{(m+1)} = \min(d_{ij}^{(m)}, d_{i,m+1}^{(m)} + d_{m+1,j}^{(m)}).$$

3. Длина кратчайшего пути из вершины  $v_i$  в вершину  $v_j$   
 $d(v_i, v_j) = d_{ij}^{(n)}$ .

Если  $|V(G)| = n$ , то алгоритм Флойда-Уоршалла содержит  $n$  шагов. Если из вершины  $v_i$  нет дуги в вершину  $v_j$ , то считаем вес дуги равным  $\infty$ . Для ребер, являющихся петлями, считаем вес дуги равными 0, т.е. в матрице  $D^0$  зануляем диагональ.

**Пример 4.14.** Найдем матрицу кратчайших расстояний для графа.



$$D^{(0)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Элементы матрицы  $D^{(1)}$  находим по правилу  $d_{ij}^{(1)} = \min(d_{ij}^{(0)}, d_{i1}^{(0)} + d_{1j}^{(0)})$ .

$$\text{Получаем } D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы  $D^{(2)}$  находим по правилу  $d_{ij}^{(2)} = \min(d_{ij}^{(1)}, d_{i2}^{(1)} + d_{2j}^{(1)})$ .

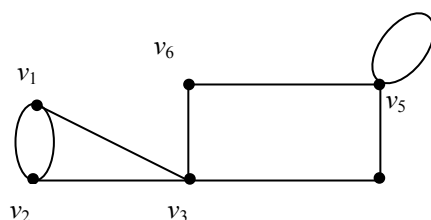
$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы  $D^{(3)}$  находим по правилу  $d_{ij}^{(3)} = \min(d_{ij}^{(2)}, d_{i3}^{(2)} + d_{3j}^{(2)})$ .

$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = D^{(3)}.$$

### Задачи для самостоятельного решения

1. Дан граф G

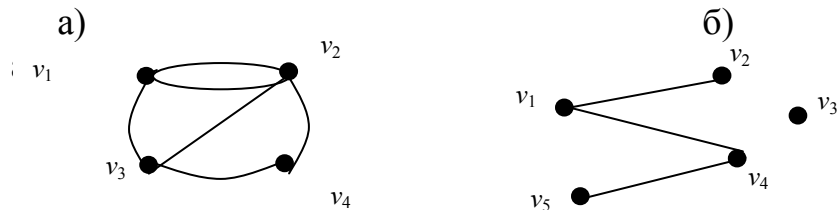


v<sub>4</sub>

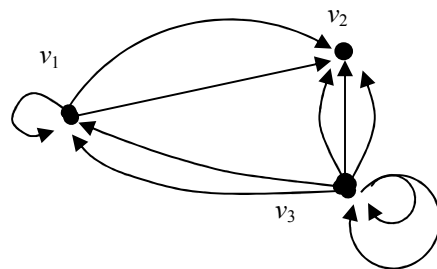
- а) определить – к какому типу относится граф;  
 б) найти  $\delta(v_1)$ ,  $\delta(v_5)$ ;  
 в) указать кратности ребер  $(v_1, v_2)$ ,  $(v_3, v_5)$ ;  
 г) найти один из подграфов графа G;  
 д) указать имеющиеся циклы, простые циклы;  
 е) указать ребра, смежные ребру  $(v_1, v_2)$ ;  
 ж) какие вершины инцидентны ребру  $(v_6, v_5)$ ?



2. Составить матрицы смежности и инцидентности графов:



в)



Какими свойствами обладают данные матрицы?

3. Орграф задан матрицей инцидентности. Не строя графа, определить какие имеются контуры в графе. Какова полустепень исхода вершин  $v_1$ ,  $v_4$  и полустепень захода вершины  $v_3$ .

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Орграф задан матрицей смежности. Выяснить, имеются ли контуры в графе.

а)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

б)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

в)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

5. Орграф D с множеством вершин  $V\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  задан списком ребер  $X = \{(1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 6), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (4, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 4), (5, 5), (6, 2), (6, 5), (7, 1), (7, 6)\}$ .

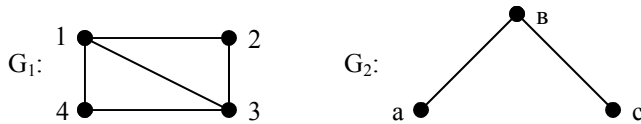
Построить реализацию графа D.

6. С помощью матрицы  $A(D)$  определить, сколько путей длины 2, 3, 4 существует из вершины  $v_1$  в вершину  $v_2$ :

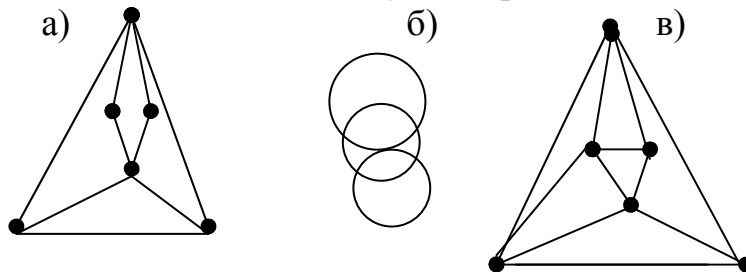
$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Построить граф и найти эти пути.

7. Даны графы  $G_1$  и  $G_2$ . Построить графы  $G_1 \cup G_2$ ,  $G_1 \times G_2$ .



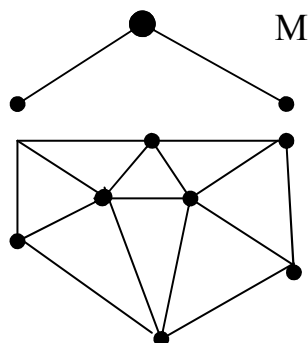
8. Выяснить, имеются ли в графах эйлеровы цепи, циклы. Если да, то выделить их, используя алгоритмы.



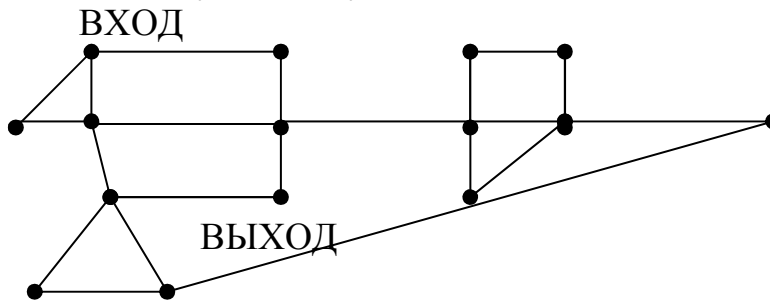
9. Нарисовать восьмивершинный граф, который:

- а) имеет эйлеров цикл;
- б) имеет эйлерову цепь;
- в) не имеет ни эйлерова цикла, ни эйлеровой цепи;
- г) имеет гамильтонов цикл;
- д) имеет гамильтонову цепь;
- е) не имеет ни гамильтона цикла, ни гамильтоновой цепи;
- ж) имеет гамильтонов цикл, но не имеет эйлерова цикла;
- з) имеет эйлеров цикл, но не имеет гамильтонова цикла.

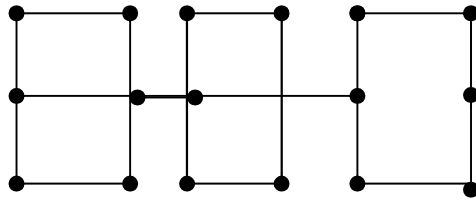
10. На рисунке изображена схема, на которой точкой отмечен магазин, а остальными вершинами – места жительства заказчиков. Как водителю машины «Доставка на дом» объехать всех заказчиков, не подъезжая ни к одному дому более одного раза?



11. На рисунке изображена схема зоопарка (вершины графа – вход, выход, перекрестки, повороты, тупики; ребра – дорожки, вдоль которых расположены клетки). Найти маршрут, по которому экскурсовод мог бы провести посетителей, показав им всех зверей и не проходя более одного раза ни одного участка пути.



12. Сможет ли экскурсовод провести посетителей по выставке так, чтобы они побывали в каждом зале ровно один раз? Соответствующий граф приведен на рисунке. Вершины графа – это вход, выход, двери, соединяющие залы, перекрестки, а ребра – залы и коридоры.



## ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

### Задача 1

Доказать равенства, используя свойства операций над множествами.

Номер варианта	Равенство
1	$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$
2	$(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$
3	$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$
4	$(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$

5	$(A \cap B) \setminus (A \cap C) = A \cap (B \setminus C)$
6	$(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$
7	$(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$
8	$(A \cup B) \setminus (A \cap C) = (A \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B)$
9	$(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$
10	$(A \setminus B) \cup (A \cap C) = A \setminus (B \setminus C)$

### Задача 2

Пусть имеется множество  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , на этом множестве определены отношения  $R \subseteq A^2$  и  $P \subseteq A^2$ .

- Определить, является ли отношение  $P$  рефлексивным.
- Построить графические представления отношений  $R, P, P \circ R$ .
- Найти области определения и множества значений для отношений  $R, P, P \circ R$ .

Номер варианта	Отношения $R, P$
1	$R = \{(x, y) \mid x^2 \geq 12y\}, \quad P = \{(x, y) \mid xy + 1 \text{ делится на } 3\}$
2	$R = \{(x, y) \mid x^2 \leq 2y\}, \quad P = \{(x, y) \mid xy + 1 \text{ делится на } 3\}$
3	$R = \{(x, y) \mid x^2 \geq 3(x+y)\}, \quad P = \{(x, y) \mid xy + 1 \text{ делится на } 3\}$
4	$R = \{(x, y) \mid x^2 \leq 3(y-x)\}, \quad P = \{(x, y) \mid xy + 1 \text{ делится на } 3\}$
5	$R = \{(x, y) \mid x^2 \geq 12y\}, \quad P = \{(x, y) \mid x + 3y \text{ делится на } 4\}$
6	$R = \{(x, y) \mid x^2 \leq 2y\}, \quad P = \{(x, y) \mid x + 3y \text{ делится на } 4\}$
7	$R = \{(x, y) \mid x^2 \geq 3(x+y)\}, \quad P = \{(x, y) \mid x + 3y \text{ делится на } 4\}$
8	$R = \{(x, y) \mid x^2 \leq 3(y-x)\}, \quad P = \{(x, y) \mid x + 3y \text{ делится на } 4\}$
9	$R = \{(x, y) \mid x^2 \geq 12y\}, \quad P = \{(x, y) \mid x + y^2 \text{ делится на } 3\}$
10	$R = \{(x, y) \mid x^2 \leq 2y\}, \quad P = \{(x, y) \mid x + y^2 \text{ делится на } 3\}$

### Задача 3

Сколько четырехзначных чисел можно образовать из цифр указанного числа?

Номер варианта	Число
1	1111234567890
2	1112234567890
3	1122334567890
4	1112345678900
5	1122345678900
6	1123456789000



<b>7</b>	1234567890000
<b>8</b>	1111223456780
<b>9</b>	1111234567800
<b>10</b>	1123456780000

### Задача4

Управление имеет  $a$  предприятий, из них  $a_1$  предприятий выпускают продукцию А,  $a_2$  – продукцию В,  $a_3$  – продукцию С. Продукцию А и В выпускают  $a_4$  предприятий, В и С –  $a_5$  предприятий, А и С –  $a_6$  предприятий. Все виды продукции выпускают  $a_7$  предприятий.

а) выпускают ровно один вид продукции А, В или С?  
б) не выпускают ни одного из указанных видов продукции?

Номер варианта	$a$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
<b>1</b>	158	120	50	30	40	10	20	8
<b>2</b>	147	110	60	50	30	20	30	7
<b>3</b>	181	100	90	80	50	30	40	6
<b>4</b>	129	90	80	60	60	20	30	5
<b>5</b>	151	80	90	70	40	50	20	3
<b>6</b>	166	70	100	80	30	40	40	3
<b>7</b>	177	60	110	60	20	30	30	9
<b>8</b>	178	50	120	40	30	20	20	4
<b>9</b>	192	40	130	30	10	10	10	6
<b>10</b>	205	30	140	20	20	10	10	2

### Задача5

Найти количество положительных трехзначных чисел:

а) не делящихся ни на одно из чисел  $a, b, c$ ;  
б) делящихся ровно на одно число из чисел  $a, b, c$ .

Номер варианта	$a$	$b$	$c$
<b>1</b>	6	9	15
<b>2</b>	4	7	18
<b>3</b>	3	4	14
<b>4</b>	5	6	16
<b>5</b>	3	8	20
<b>6</b>	6	14	20
<b>7</b>	8	11	14

<b>8</b>	9	10	12
<b>9</b>	7	15	30
<b>10</b>	12	8	34

### Задача 6

В таблице заданы номера наборов аргументов, на которых логическая функция принимает значение, равное единице. Найти СКНФ, СДНФ;

Номер варианта	Номера конститuent единиц
<b>1</b>	0,1,3,4,6,8,9,12,14,15
<b>2</b>	1,2,3,4,5,10,11,12,13,14
<b>3</b>	0,1,2,3,4,6,9,11,12,13
<b>4</b>	0,2,4,5,6,11,12,13,14,15
<b>5</b>	0,1,4,5,6,8,12,13,14,15
<b>6</b>	0,2,3,6,7,8,9,10,11,14
<b>7</b>	1,2,3,5,7,8,10,11,12,15
<b>8</b>	0,3,4,5,7,8,10,11,12,14
<b>9</b>	0,1,4,5,6,8,12,13,14,15
<b>10</b>	1,2,3,5,6,8,10,12,13,14

### Задача 7

Граф  $G$  задан списком ребер (каждый элемент списка – это тройка чисел: номера двух смежных вершин и вес ребра, их соединяющего). Требуется

- Нарисовать граф  $G$ .
- Найти степенную последовательность графа  $G$ .
- Найти матрицу смежности графа  $G$ .
- Обозначить ребра и найти матрицу инцидентности графа.
- Определить количество компонент связности графа.
- Найти четыре простых цикла.
- Найти минимальный остов графа и его вес.

Номер варианта	Список ребер с весами	Номер варианта	Список ребер с весами
<b>1</b>	(1,4,5), (1,5,3), (1,6,1), (1,8,4), (2,3,6), (2,6,3), (3,8,2), (4,5,1), (4,6,5), (4,7,4), (6,7,7)	<b>6</b>	(1,3,2), (1,7,5), (2,6,7), (2,8,3), (3,6,8), (4,7,2), (4,8,1), (5,6,4), (5,8,6), (6,7,9), (7,8,5)
<b>2</b>	(1,2,6), (1,4,8), (1,5,5), (1,6,3), (2,3,6), (2,4,1), (2,5,2), (3,8,7), (4,5,1), (4,6,2), (4,7,5), (4,8,9),	<b>7</b>	(1,2,9), (1,3,5), (1,5,4), (1,6,7), (2,6,1), (2,8,7), (3,4,8), (3,5,3), (3,6,1), (3,7,2), (4,8,6), (5,6,3),

	(5,6,3),	(6,8,2),	(7,8,5)		(5,7,4)		
<b>3</b>	(1,3,4), (2,5,8), (3,6,8), (4,7,5),	(1,5,7), (2,6,2), (3,7,2), (4,8,3),	(1,7,1), (3,4,3), (4,6,1), (6,8,1)	<b>8</b>	(1,2,7), (1,8,5), (4,5,3), (5,7,4),	(1,4,9), (2,3,9), (4,7,6), (5,8,6),	(1,5,2), (3,7,1), (4,8,1), (6,8,1)
<b>4</b>	(1,4,3), (1,8,3), (2,8,4), (4,5,1), (6,7,2)	(1,5,6), (2,3,1), (3,7,6), (4,6,2),	(1,6,8), (2,6,2), (3,8,9), (4,7,7),	<b>9</b>	(1,5,7), (2,5,3), (2,8,1), (3,8,4), (4,8,5)	(1,6,6), (2,6,5), (3,5,2), (4,6,1),	(1,7,9), (2,7,8), (3,6,6), (4,7,2),
<b>5</b>	(1,5,3), (2,5,9), (3,5,1), (4,7,6),	(1,6,6), (2,6,7), (3,6,3), (4,8,1)	(1,7,8), (2,7,2), (3,8,4),	<b>10</b>	(1,3,8), (3,4,6), (4,6,7), (6,8,5)	(1,5,3), (3,6,3), (4,7,6)	(2,6,1), (3,7,2), (4,8,2),

<b>126</b>	(1,3,6), (2,8,4), (3,7,4), (5,6,1), (6,7,4),	(1,7,8), (3,5,3), (4,7,5), (5,7,3), (7,8,1),	(2,6,5), (3,6,9), (4,8,2), (5,8,8),	<b>136</b>	(1,2,4), (1,8,8), (2,7,1), (4,7,9), (5,8,1),	(1,4,1), (2,3,4), (3,7,5), (4,8,7), (6,7,4),	(1,5,5), (2,6,7), (4,5,4), (5,6,3), (6,8,2),
<b>127</b>	(1,2,3), (2,6,4), (3,6,9), (5,6,4),	(1,3,7), (2,8,1), (3,7,2), (5,7,1),	(1,6,8), (3,4,5), (4,8,1),	<b>137</b>	(1,4,5), (2,7,1), (3,8,3), (5,6,4),	(1,5,7), (2,8,6), (4,6,2), (5,7,8),	(2,6,4), (3,7,9), (4,8,1), (5,8,1),
<b>128</b>	(1,2,7), (1,6,4), (2,5,8), (4,6,3), (5,6,3),	(1,4,8), (2,3,1), (3,8,1), (4,7,5), (6,8,4),	(1,5,6), (2,4,5), (4,5,4), (4,8,7), (7,8,2),	<b>138</b>	(1,2,8), (2,3,4), (4,5,1), (4,8,4), (7,8,2),	(1,4,7), (2,4,2), (4,6,7), (5,6,6),	(1,6,5), (3,8,6), (4,7,2), (6,8,1),
<b>129</b>	(1,4,8), (1,8,3), (3,8,7), (6,7,5),	(1,5,4), (2,3,1), (4,5,9), (7,8,1),	(1,6,6), (2,6,5), (4,7,2),	<b>139</b>	(1,2,3), (1,8,9), (3,6,2), (5,6,3),	(1,3,5), (2,7,6), (3,8,7), (6,8,1),	(1,6,7), (3,4,1), (4,5,4), (7,8,9),
<b>130</b>	(1,4,3), (2,7,9), (3,8,4), (5,6,7),	(1,5,6), (2,8,2), (4,6,1), (5,7,9),	(2,6,8), (3,7,5), (4,8,3), (5,8,4),	<b>140</b>	(1,4,5), (1,8,7), (2,9,20), (3,8,4), (5,7,10),	(1,5,3), (2,4,6), (3,4,18), (4,5,7), (6,9,8),	(1,6,9), (2,6,15), (3,7,1), (4,6,3), (8,9,10),